Mathematik Abitur Zusammenfassung Marius Buila

1.Analysis

1.1 Grundlagen:

Ableitung f'(u) **ist Steigung** in Punkt P (u/f(u)) auf K
$f(x) = a * x^r \rightarrow f'(x) = a * r * x^{r-1}$
Tangentengleichung: $y= f'(u) * (x-u) + f(u)$
Normalengleichung: $y= \frac{-1}{f'(u)} * (x-u) + f(u)$

1.2 Ableitungsregeln:

f(x)	**f'(x)**
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$(\frac{1}{2* \sqrt{x}})$
sin (x)	cos (x)
cos (x)	-sin (x)
tan (x)	$\tan^2 * x + 1$ oder $\frac{1}{cos^2 * x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x * \ln a$
ln (x)	$(\frac{1}{x})$
$\log_a (x)$	$(\frac{1}{x * \ln a})$

$(f \mp g)' = f' \mp g'$
$(f * g)' = f'g + fg'$
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Kettenregel: $f(x) = h(u(x))$
$f'(x) = h'(u(x)) * u'(x)$ (äußere mal innere Ableitung)
bei $f(x) = e^{u(x)} \rightarrow f'(x) = e^{u(x)} * u'(x)$

Allgemein bei $f(x) = (u(x))^k$
⇨ $f'(x) = (u^k)' = k * u^{k-1} * u'$

1.3 Aufgabenarten:

$m_n = - 1/m_t \wedge m_t \neq 0$
Tangente bei x_1 parallel zu Geraden g mit m_g:
$f'(x_1) = m_g$
Tangente bei x_1 parallel zu x-Achse:
$f'(x_1) = 0$
Tangente bei x_1 senkrecht zu Gerade g mit m_g:
$f'(x) = -1/m_g$

1.4 Monotonie:

$f'(x) \geq 0 \rightarrow$ monoton wachsend
$f'(x) \leq 0 \rightarrow$ monoton fallend
$f'(x) > 0 \rightarrow$ streng monoton wachsend
$f'(x) < 0 \rightarrow$ streng monoton fallend

1.5 Extrempunkte:

Bedingung: $f'(x) = 0$

Bestimmung: 1. Vorzeichen von $f'(x)$ bei x_1

(+ → -) Hochpunkt bei $(x_1/f(x_1))$

(- → +) Tiefpunkt bei $(x_1/f(x_1))$

2. x_1 in $f''(x)$ einsetzen

$f''(x_1) < 0$ → Hochpunkt

$f''(x_1) > 0$ → Tiefpunkt

Achtung:

Doppelte Nullstelle → kein Vorzeichenwechsel

Vielfachheit von Nullstellen:

x_1 einfache Nullstelle von **f(x)** und Vorzeichenwechsel I→ Schnitt mit x-Achse

x_1 einfache Nullstelle von **f'(x)** und Vorzeichenwechsel → x_1 = Extremstelle von f

x_1 doppelte Nullstelle von **f(x)** und **kein** Vorzeichenwechsel → x_1 = Berührpunkt mit x-Achse

x_1 doppelte Nullstelle von **f'(x)** und **kein** Vorzeichenwechsel → $x_1 \neq$ Extremstelle von f

1.6 Wendepunkte:

Bedingung: $f''(x) = 0$

Bestimmung: $f'''(x_1) \neq 0$ → Wendepunkt $(x_1/f(x_1))$

wenn $f''(x_0) > 0$ ist K_f bei x_0 linksgekrümmt

wenn $f''(x_0) < 0$ ist K_f bei x_0 rechtsgekrümmt

ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente ist ein Sattelpunkt, liegt dieser auf der x-Achse so liegt eine 3-fache Nullstelle vor

1.7 Kurvenuntersuchung:

$f(x) = 0$ → Nullstellen von f

$f'(x) = 0$ → Stellen mit waagrechter Tangente

$f''(x)= 0$ → mögliche Wendestellen

Symmetrie:

1. Achsensymetrisch an y-Achse: $f(x) = f(-x)$
2. Punksymetrisch am Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

Asymptote für x → ∞ bzw. x→ - ∞ wenn e → 0

$f(x) = ax+c+be$ → $y = ax+c$ (schief)

$f(x) = a + be$ → $y = a$ (waagrecht)

$f(x) = (ax^2 + bx + c) * e$ → $y = 0$ (waagrecht)

Untersuchung einer Kurvenschar

Der Parameter wird bei einer Untersuchung wie eine feste reele Zahl behandelt.

Einsetzen eines **x-Wertes** in:

f(x): 1. Bestimmung des y-Wertes
2. Bestimmung des Funktionswertes

f'(x): Bestimmung der Steigung

f''(x): 1. Nachweis von Extremstellen
2. Krümmung des Schaubildes von f

f'''(x): Nachweis von möglichen Wendestellen

<u>1.8 Ortskurve:</u>

Eine Ortskurve ist die Kurve, auf welcher alle Hoch-(Tief-)punkte liegen.

<u>2. Anwendung der Differentialrechnung</u>

<u>2.1 Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen:</u>

2. Grades: $f(x) = ax^2+bx+c$
3. Grades: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$
4. Grades: $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^5+cx^3+ex$

Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4+cx^2 + e$

Bei einer Symmetrie mit y-Achse, Tiefpunkten bei (2/0) und (-2/0) und einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist der Ansatz mit Linearfaktoren: $f(x) = a * (x-2)^2 (x+2)^2$

Formulierungen in der Aufgabe	**Bedingung:**
K geht durch Punkt P (u/v)	f(u)=v
K berührt x-Achse in x=u	f(u)=0 ^ f'(u)=0
K hat in x=u Steigung 5	f'(u) = 5
K hat in P(u/v) Tangente mit Steigung -2	f(u)=v ^ f'(u)= -2
K hat Extrempunkt T (u/v)	f(u)=v ^f'(u)=0
K hat Wendepunkt W (u/v)	f(u)=v ^ f''(u) = 0
Tangente in WP W (u/v) Steigung ½	f(u)=v ^ f''(u)= 0 ^ f'(u) = 1/2
W (u/v) Sattelpunkt	f(u)=v ^ f''(u) = 0 ^ f'(u) = 0
K und G berühren sich in x=u	f(u)=g(u) ^ f'(u) = g'(u)
K und G schneiden sich in P (u/v) senkrecht	f(u)=g(u) ^ f'(u) * g'(u) = -1

<u>2.2 Extremwertaufgaben</u>

Abs. Maximum (Minimum) bei x_1 mit $f(x_1) = 0$ oder an Randstellen vom Definitionsbereich D

Lösung von Extremwertaufgaben:

a) Aufstellen der Zielfunktion A(u)
b) Ableiten der Zielfunktion und Nullstellen ausrechnen u_1 und u_2
c) Berechnung der Funktionswerte von u_1 und u_2
d) Berechnung Randwerte
e) Vergleich Randwerte und Funktionswerte → abs. Extremum

Wenn rel. Extremum gesucht wird ohne Punkt d) und e) aber mit Prüfung der 2. Ableitung

3. Integralrechnung

3.1 Stammfunktionen und unbest. Integral

f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
c	c x	ln x	x * ln x -x
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}$ * (x * ln x –x)
$\frac{1}{x}$	ln |x|	sin x	- cos x
e^x	e^x	cos x	sin x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\sin^2 x$	½ (x-sin x * cos x)

Die Extremstelle von F ist eine Nullstelle von f.

Die Wendestelle von F ist eine Extremstelle von f.

3.2 Das Bestimmte Integral

Wenn F die Stammfunktion von f ist → bestimmtes Integral von f über [a;b]

dann gilt $\int_a^b f(x) * dx = F(b) - F(a)$

1. **Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:**
   Jede Integralfunktion I_a einer Funktion f ist eine Stammfunktion von f.

   $I_a(x) = \int_a^x f(t) * dt \rightarrow I_a'(x) = f(x)$

2. **Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:**
   Ist F eine beliebige Stammfunktion von f
   dann $\int_a^b f(x) * dx = F(b) - F(a)$

Rechenregeln:

Faktorregel: $\int_a^b c * f(x) * dx = c \int_a^b f(x) * dx = c$

Summenregel: $\int_a^b f(x) * dx +/- \int_a^b g(x) * dx = \int_a^b f(x) +/- g(x) * dx$

Additivität: $\int_a^c f(x) * dx = \int_a^b f(x) * dx + \int_b^c f(x) * dx$

Vertauschen: $\int_a^b f(x) * dx = - \int_b^a f(x) * dx$

3.3 Flächenberechnung mit Hilfe der Integralfunktion

Wenn die Kurve K oberhalb der x-Achse liegt

→ $\int_a^b f(x) * dx = A$

Wenn die Kurve K unterhalb der x-Achse liegt

→ $|\int_a^b f(x) * dx| = \mathrm{A}$

Wenn die Fläche zwischen zwei Kurven berechnet werden soll

→ $\int_a^b f(x) - g(x) * dx = A$

3.4 Anwendung des bestimmten Integrals

Der Mittelwert m der Funktionswerte von f [a;b] lässt sich bestimmen durch:

m = $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) * dx$

Volumenberechnung:

Drehung um die x-Achse: $V_x = \pi \int_a^b y^2 * dx$

Drehung um die y-Achse: $V_Y = \pi \int_a^b x^2 * dy$

4. Näherungsverfahren

Mit Hilfe des GTRs:

Graph → G-Solve → Root

bzw. Solver die Gleichung einsetzen.

Regression mit GTR:

Stat → Werte eintragen → Graph

Flächen mit Fassregel von Kepler:

wenn die Funktion f [a;b] eine stetige Funktion ist lässt sich die Fläche näherungsweise bestimmen durch

→ $\int_a^b f(x) * dx \approx \frac{1}{6}$(b-a) [f (a) + 4 f ($\frac{a+b}{2}$)+f (b)]